EXERCICE N°1 : 15' 3 points

Soit pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \left(z^2 - 4z + 5\right)^2 + \left(z+1\right)^2$. **1)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2) Ecrire alors $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

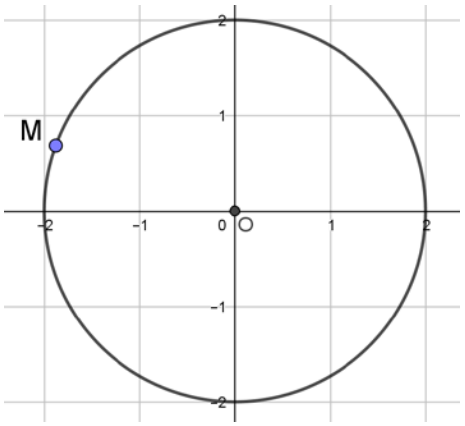
EXERCICE N°2 : 30' 4 points

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \left(3+i\sqrt{3}\right)z + 2\left(1+i\sqrt{3}\right) = 0$.

b) Donner les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2) On désigne par A, B et B' les points d'affixes respectives 2, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $\bar{b}$.

Dans la figure ci-contre, on a placé sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2, le point M d'affixe $z = 2e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi,\pi]$.



a) Recopier la figure et construire les points A, B, B' et le point M' d'affixe $z' = 2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

b) Montrer que $z' = \frac{b}{2}z$.

3) On désigne par K et K' les milieux respectifs de [BM] et [B'M'].

a) Vérifier que $z_{K'} = \frac{2\bar{b} + bz}{4}$.

b) Montrer que : $b^2 - 4b = 2\bar{b} - 8$ et que $z_{K'} - 2 = \frac{b}{2}\left(z_K - 2\right)$.

c) En déduire que lorsque M varie sur le cercle $\mathscr{C}$, la médiatrice de [KK'] passe par un point fixe que l'on précisera.

EXERCICE N°3 : 25' 4 points

1) On donne les nombres complexes suivants :

$a = \left(1+\sqrt{3}\right)i$; $b = -\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right]$ et $w = 2+\left(1-\sqrt{3}\right)i$.

a) Donner la forme algébrique de a^2 et w^2.

b) Vérifier que $w^2 = a^2 - 4b$.

2) On considère les équations suivantes : $(E_1): z^2 - az + b = 0$ et $(E_2): z^3 - 2az^2 + \left(b+a^2\right)z - ab = 0$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1) (on note z_1 et z_2 les solution de (E_1) tel que $|z_1| < |z_2|$).

b) Vérifier que a est une solution de l'équation (E_2).

c) En déduire les solutions de (E_2).

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1+i$, $z_B = -1+i\sqrt{3}$, w et a.

a) Donner sous forme exponentielle z_B puis placer A et B.

b) Vérifier que $z_A - z_B = w$. Construire alors le point C.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn